Premier Jour

Mar del Plata, Argentine - 24 Juillet 1997

1. Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de sa partie blanche. On pose:

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Calculer $f(m,n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(b) Montrer que pour tout m et n : $\quad f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max(m,n)$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tous m et n, $f(m,n) < C$.

2. L'angle $\hat{A}$ est le plus petit dans le triangle ABC.

Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc limité par B et C qui ne contient pas A.

Les médiatrices des segments AB et AC rencontrent la droite AU respectivement en V et W. Les droites BV et CW se coupent au point T.

Montrer que:

$$AU = TB + TC.$$

3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

et

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que:

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Chaque problème vaut 7 points.
Temps accordé: 4 heures et demie.

Deuxième Jour

Mar del Plata, Argentine - 25 Juillet 1997

4. Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, 2n{-}1\}$, est appelée une matrice *d'argent* si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la i-ème ligne et de la i-ème colonne contient tous les éléments de S.
Montrer que:

(a) il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$;

(b) il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n.

5. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geq 1$, $b \geq 1$ vérifiant l'équation:

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

6. Pour tout entier strictement positif n, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls. Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$ car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Chaque problème vaut 7 points.
Temps accordé: 4 heures et demie.