Lundi 18 juillet 2011

Problème 1. Pour tout ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatre entiers strictement positifs deux à deux distincts, on note s_A la somme $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ et on note n_A le nombre de couples (i, j), avec $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, tels que $a_i + a_j$ divise s_A.

Déterminer les ensembles A pour lesquels n_A est maximal.

Problème 2. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. On suppose que trois points quelconques de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés.

On appelle *moulin à vent* le processus suivant : le processus commence avec une droite ℓ contenant un unique point P de $\mathcal{S}$; la droite ℓ tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point P, appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de $\mathcal{S}$; ce point, Q, devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Q, jusqu'à rencontrer un nouveau point de $\mathcal{S}$; ce processus continue indéfiniment.

Montrer qu'on peut choisir un point P de $\mathcal{S}$ et une droite ℓ contenant P, de façon que le moulin à vent commençant par ℓ utilise chaque point de $\mathcal{S}$ comme pivot une infinité de fois.

Problème 3. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x, y,

$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f(f(x)).$$

Montrer que $f(x) = 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 19 juillet 2011

Problème 4. Soit n un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de n poids, de masses respectives $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.
On doit placer, l'un après l'autre, chacun des n poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche ; dans ce but, à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.
Déterminer le nombre de façons de procéder.

Problème 5. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que, quels que soient les entiers m, n, la différence $f(m) - f(n)$ est divisible par $f(m-n)$.
Quels que soient les entiers m, n vérifiant $f(m) \leqslant f(n)$, montrer que $f(n)$ est divisible par $f(m)$.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite tangente à Γ. Soit ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c les droites symétriques de ℓ par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c est tangent à Γ.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points