Mardi 8 juillet 2014

Problème 1. Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problème 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère un échiquier $n \times n$ divisé en n^2 cases. Une configuration de n jetons répartis dans ces cases est dite *paisible* si chaque ligne et chaque colonne de l'échiquier contient exactement un jeton. Déterminer le plus grand entier strictement positif k tel que, pour toute configuration paisible de n jetons, il existe un carré $k \times k$ qui ne contient aucun jeton dans ses k^2 cases.

Problème 3. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90°$. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD. Les points S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD, de sorte que H soit à l'intérieur du triangle SCT et que

$$\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90°, \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90° .$$

Prouver que la droite BD est tangente au cercle circonscrit au triangle TSH.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 9 juillet 2014

Problème 4. Les points P et Q appartiennent au côté BC du triangle ABC dont les angles sont aigus, de sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites AP et AQ, avec P milieu de $[AM]$ et Q milieu de $[AN]$. Prouver que le point d'intersection des droites BM et CN est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Problème 5. Pour tout entier n strictement positif, la Banque du Cap émet des pièces de valeur $\frac{1}{n}$. Étant donné un nombre fini de telles pièces (dont les valeurs ne sont pas nécessairement différentes) de valeur totale ne dépassant pas $99 + \frac{1}{2}$, prouver qu'il est possible de les répartir en 100 piles ou moins, chacune de valeur totale au plus 1.

Problème 6. Un ensemble de droites du plan est dit en *position générale* s'il n'y en a pas deux parallèles ni trois qui passent par un même point. Un ensemble de droites en position générale découpe le plan en régions, certaines ayant une aire finie. Ces dernières sont appelées les *régions finies de l'ensemble*. Prouver que pour tout n suffisamment grand, dans tout ensemble de n droites en position générale, il est possible de colorer en bleu au moins $\sqrt{n}$ de ses droites de sorte qu'il n'y ait aucune région finie de cet ensemble de bord entièrement bleu.

Note : Des résultats pour lesquels $\sqrt{n}$ serait remplacé par $c\sqrt{n}$ seront valorisés selon la valeur de la constante c.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points