Vendredi 10 juillet 2015

Problème 1. On dit qu'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de points du plan est *équilibré* si, pour tous points A et B de $\mathcal{S}$ distincts, il existe un point C de $\mathcal{S}$ tel que $AC = BC$. On dit que $\mathcal{S}$ est *excentrique* si, pour tous points A, B et C de $\mathcal{S}$ distincts, il n'existe pas de point P de $\mathcal{S}$ tel que $PA = PB = PC$.

(a) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.

(b) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

Problème 2. Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs pour lesquels chacun des nombres

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

est une puissance de 2.

(*Une puissance de* 2 *est un entier de la forme* 2^n, *où* n *est un entier positif ou nul.*)

Problème 3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB > AC$. Soit Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et F le pied de sa hauteur issue de A. On désigne par M le milieu du segment $[BC]$. Soit Q le point de Γ tel que $\widehat{HQA} = 90°$ et soit K le point de Γ tel que $\widehat{HKQ} = 90°$. On suppose que les points A, B, C, K et Q sont tous distincts et dans cet ordre sur Γ.

Prouver que le cercle circonscrit au triangle KQH est tangent au cercle circonscrit au triangle FKM.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Samedi 11 juillet 2015

Problème 4. Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω, et soit O le centre de Ω. Un cercle Γ de centre A rencontre le segment $[BC]$ aux points D et E, de sorte que B, D, E et C sont distincts et dans cet ordre sur la droite (BC). On note F et G les points d'intersection de Γ et Ω, de sorte que A, F, B, C et G sont dans cet ordre sur Ω. Soit K le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle BDF avec le segment $[AB]$. Soit L le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle CGE avec le segment $[CA]$.

On suppose que les droites (FK) et (GL) ne sont pas confondues et qu'elles se rencontrent au point X. Prouver que X appartient à la droite (AO).

Problème 5. Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

pour tous réels x et y.

Problème 6. La suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers vérifie les conditions :

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ pour tout $j \geqslant 1$,

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ pour tous $1 \leqslant k < \ell$.

Prouver qu'il existe deux entiers strictement positifs b et N pour lesquels

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

pour tous les entiers m et n tels que $n > m \geqslant N$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points